

## Devoir de Synthèse n°01

### Exercice n°1 : (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. On indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondants à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) le nombre complexe  $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$  est une racine carré de :

a)  $4i$  ; b)  $-4i$  ; c)  $2\sqrt{2}i$

2) Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes tels que  $|z| = 3$  et  $z' = z + \frac{1}{z}$  alors

a)  $|z'| = \frac{8}{3}$       b)  $|z'| = \frac{4}{3}$       c)  $|z'| = \frac{10}{3}$

3) Soit  $f$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $[3;6]$  tel que  $|f'(x)| \leq 5$  pour tout  $x \in [3;6]$

a)  $|f(6) - f(3)| \leq 5$       b)  $|f(6) - f(3)| \leq 3$       c)  $|f(6) - f(3)| \leq 15$

4) Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$   $f$  est dérivable sur

a) L'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$       b) L'intervalle  $\mathbb{R}$       c) L'intervalle  $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

### Exercice n°2 (7 points) :

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - (2+i)z + 1+i = 0$

2) On considère l'équation complexe  $(E_\theta) : z^2 - (i + 2\cos\theta)z + 1 + ie^{-i\theta} = 0$ , avec  $\theta \in [0, \pi]$

a) Vérifier que  $e^{-i\theta}$  est une solution de  $(E_\theta)$

b) En déduire l'autre solution de  $(E_\theta)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points

$A(e^{-i\theta})$  et  $B(i + e^{i\theta})$

a) Montrer  $AB = 1 + 2\sin\theta$

b) Déterminer les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles le triangle AOB est isocèle en A



**Exercice n°3(9 points)**

1/ Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$

b) Vérifier que pour tout réel  $x$ , on a :  $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

c) Etudier les variations de  $g$ .

d) En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) > 0$ .

2/ Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$

On désigne par  $(\zeta_i)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

a- Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = g(x)$

b- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ , interpréter graphiquement ce résultat.

c- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3/ a- Montrer que la droite  $D : y = 2x - 1$  est une asymptote à  $(\zeta_i)$  au voisinage de  $+\infty$ .

b- Ecrire une équation de la tangente  $T$  en  $O$  et étudier sa position par rapport à  $(\zeta_i)$ .

c- Tracer  $(\zeta_i)$ ,  $T$  et  $D$ .

4/ a- Vérifier que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

b- Calculer  $(f^{-1})'(\sqrt{2})$  "  $f^{-1}$  étant la fonction réciproque "

c- Tracer  $(\zeta_{f^{-1}})$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

$$f: [0; +\infty[ \rightarrow [1; +\infty[$$
$$f(x) = x^2 + 1 \quad | \quad f'(x) = 2x$$

